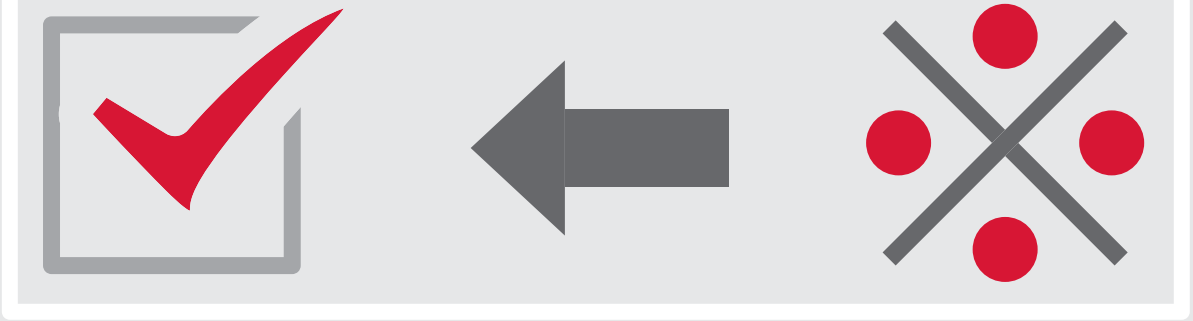
محمدتقی طاهری تنجانی

برهان خلف



اشاره

یکی از روش‌های اســـتدلال ریاضی استفاده از برهان خلف در حل مسائل است. در این روش به‌جای آنکه درستی یک گزاره را به‌طور مستقیم ثابت کنیم، راهی غیرمستقیم انتخاب می‌کنیم و ثابت می‌کنیم با نپذیرفتن درستی گزارهٔ حکم به نتیجه‌ای نامعقول می‌رسیم. به همین خاطر این شیوهٔ اثبات را روش غیرمستقیم نیز می‌گویند.

اقلیدس اولین کســـی بود که از برهان خلف در کتاب مشـــهور خود به نام «مقدمات» اســـتفاده کـــرد. او آن را معمای برهان خلف نامید. یکی از کارآمدترین روش‌های اســـتدلال ریاضی روش برهان خلف اســـت. در این مقاله با مثال‌های ســـاده و معماگونه، ورودی به شیوهٔ استفاده از برهان خلف داریم.

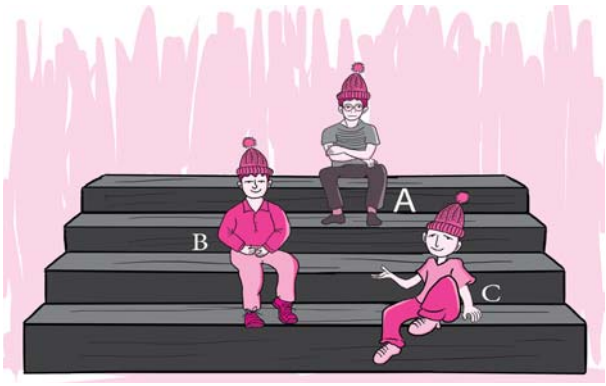
مثال ۱. از کیســـه‌ای شـــامل دو کلاه قرمز و یک کلاه سیاه، دو کلاه را برمی‌داریم و بر سر دو نفر A و B قرار می‌دهیم. از آن‌ها می‌خواهیم با توجه به اطلاعات رنگ کلاه‌های داخل کیسه، رنگ کلاه خودشان را حدس بزنند.

فرد A بعد از مدتی فکر کردن گفت: «نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است!» بلافاصله فرد B گفت: رنگ کلاه من قرمز است. فرد B چگونه استدلال کرد؟

پاسخ ۱. B با خـــود فـــکر می‌کند که اگر کلاه سرش سیاه باشد، شخص A باید فوراً جواب می‌داد و رنگ کلاهش را حدس می‌زد. اما چون او جواب نداد، پس رنگ کلاه من سیاه نیست. در نتیجه کلاهم حتماً قرمز است.

همان‌طور که در مثال ۱ مشـــاهده شد، فرد B به‌جای استدلال مستقیم به شیوه‌ای غیرمستقیم و اینکه اگر کلاه من سیاه بود (خلاف حکم مورد نظر) و نـــوع برخورد A نتیجه می‌گیرد که کلاهش قرمز است. به مثال دیگری در این زمینه توجه کنید.

مثال ۲. ســـه فـــرد A ، B و C روی پله‌هایی به‌صورت شـــکل ۱ نشسته‌اند. از کیسه‌ای که شامل سه کلاه سیاه و دو کلاه قرمز است، در تاریکی روی سر هر یک از افراد A ، B و C کلاهی قرار می‌دهیم. ســـپس از آن‌ها می‌خواهیم رنگ کلاهشـــان را تشـــخیص دهند. C می‌گوید من رنگ کلاهم را نمی‌دانـــم. بلافاصله B می‌گوید من هم رنـــگ کلاهم را نمی‌دانم. بعد از صحبت‌های C و B، فرد A می‌گوید رنگ کلاه من سیاه است. A چگونه استدلال می‌کند؟

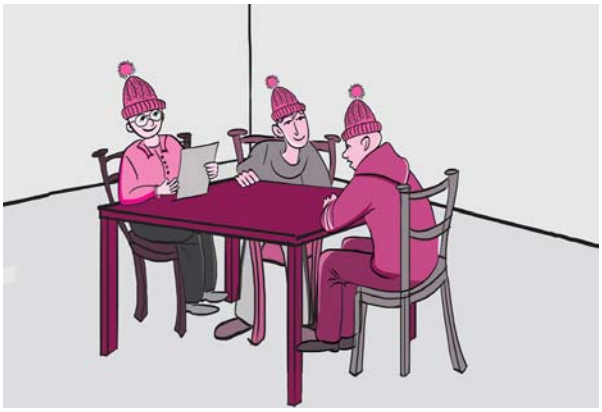


پاسخ ۲. (روش برهان خلف) A با خودش این‌گونه استدلال می‌کند که اگر رنگ کلاه من قرمز باشد، پس رنگ کلاه B قرمز نیست، چون در غیر این صورت شخص C باید جواب می‌داد که کلاه سر خودش سیاه است. شخص B کلاه قرمز را باید روی سر A ببیند و جواب منفی C را هم می‌شنود. پس شخص B باید متوجه سیاه بودن کلاه خودش شود، اما شـــخص B جواب منفی داده اســـت. این تناقض نشان می‌دهد که فرض قرمز بودن کلاه A منتفی است. پس باید رنگ کلاه A سیاه باشد.

مثال ۳. ســـه فرد A ، B و C دور یک میز نشســـته‌اند. از داخل کیســـه‌ای که دارای سه کلاه ســـیاه و دو کلاه قرمز است، در تاریکی روی ســـر هر یک از این افراد کلاهی می‌گذاریم. با توجه به اطلاعات داخل کیسه که هر ســـه نفر می‌دانند، می‌خواهیم رنگ کلاهشان را حدس بزنند.

اما مدت‌زمان زیادی می‌گذرد و هر ســـه در فکر هستند، یکدفعه هر ســـه نفر یکصـــدا می‌گویند: «من رنگ کلاه خـــودم را می‌دانم». چگونه استدلال کرده‌اند؟

پاسخ ۳. ایـــن افراد از روش برهان خلف استفاده کرده‌اند. کلاه هر سه نفر سیاه است. اگر رنگ کلاه هیچ کدام از این سه نفر سیاه نباشد (فـــرض خلف)، حداقل کلاه یکی از آن‌ها قرمز اســـت. در نتیجه دو حالت زیر در نظر گرفته می‌شود:



حالت اول) کلاه دو نفر قرمز باشـــد. این حالت ممکن نیســـت، چون در این صورت شخص سوم فوراً جواب می‌داد که کلاهش سیاه است.

حالت دوم) کلاه یکی از افراد (مثلاً A) قرمز باشـــد. این حالت نیز ممکن نیســـت، چون در این صورت نفر B (یا C) پیش خود فکر می‌کند که اگر کلاه ســـر خودش نیز قرمز باشـــد، شخص C (یا B) باید متوجه رنگ کلاه خودش می‌شـــد اما شـــخص C (یا B) جواب نمی‌دهد. پس کلاه A قرمز نیست. در نتیجه بعد از چند دقیقه فکر کردن شخص B (یا C) باید جواب می‌داد که کلاه سر خودش سیاه است.

بنابراین در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. یعنی کلاه هیچ یک از آنان قرمز نیست، پس کلاه هر سه نفر سیاه است.

مثال ۴. پدری سه فرزند به نام‌های A، B و C داشت. می‌خواست باهوش‌ترین آن‌ها را شناسایی کند. از آن‌ها خواست دور میز دایره‌ای بنشینند و بر ســـر هر کدام در تاریکی یک کلاه از رنگ‌های سیاه یا قرمز قرار داد و به آن‌ها گفت: رنگ کلاه شما قرمز یا سیاه است. حالا هر کس کلاهی به رنگ قرمز می‌بیند، دست خود را بلند کند. هر سه نفر دست خود را بلند می‌کنند. سپس از آن‌ها می‌خواهد که هر کس رنگ کلاه خود را تشـــخیص داد، از جای خود بلند شود. بعد از چند دقیقه A از جای خود بلند شـــد. این شخص چگونه به رنگ کلاهش پی برد و کلاهش چه رنگی بود؟

پاسخ ۴. رنگ کلاه A قرمز بود. A پیش خود این‌گونه فکر می‌کند: آیا رنگ کلاهم می‌تواند ســـیاه باشد؟ اگر رنگ کلاهم سیاه باشد، B (یا C) می‌فهمد که کلاهش قرمز است. پس شخص B (یا C) باید از جای خود بلند می‌شد . از آنجا که هیچ‌یک از آن‌ها از جای خود بلند نشدند، پس زنگ کلاه A سیاه نیست و در نتیجه قرمز است.

مثال ۵. سه فیلسوف یونان باستان به نام‌های A، B و C زیر درختی خوابیده بودند. رهگذری پیشـــانی هر ســـه را سیاه کرد و از آنجا دور شـــد. این سه نفر از خواب بیدار شدند. هر یک به سیاه شدن پیشانی دو نفر دیگر می‌خندیدند. در یک لحظه C از خندیدن باز ایســـتاد و فهمید که پیشـــانی او نیز سیاه شده اســـت. C چگونه به این نتیجه رسید.

پاسخ ۵. C این‌گـــونه اســـتدلال می‌کـــند: اگر پـــیشانی مـــن سیـــاه نباشد (فرض خلف)، A و B دارند می‌خندند و می‌بینند که پیشانی من ســـیاه نیســـت. پس در یک لحظه A (یا B) باید از خندیدن باز می‌ایســـتاد، چون می‌فهمید که B (یا A) به او می‌خندد، ولی آن‌ها خندهٔ خودشان را قطع نکردند. پس پیشانی من نیز باید سیاه باشد.

مثال ۶. سه فیلسوف A، B و C دور یک میز دایره‌ای‌شکل نشسته‌اند. بر سر هر کدام یک کلاه دارای دو برچسب رنگی قرار می‌دهیم و به آن‌ها می‌گوییم برچسب‌های کلاهشان از دور رنگ سفید و سیاه است و تعداد هیچ‌کدام از آن‌ها بیشتر از ۴ تا نیست. از A، B و C به ترتیب سؤال می‌کنیم: آیا رنگ برچسب‌های کلاهشان را می‌توانند تشخیص دهند؟ جواب هر سه نفر منفی است. برای بار دوم از A می‌پرسیم. و جوابش منفی است. سپس از B همان سؤال را می‌پرسیم در کمال ناباوری جوابش مثبت است. B چگونه به رنگ برچسب کلاهش پی برد؟

پاسخ ۶. رنگ برچسب‌های کلاه B یکی سفید و یکی سیاه است. B این‌گونه می‌اندیشد که اگر هر دو برچسب کلاهش سیاه باشد، در این‌صورت شخص A در دور دوم سؤال کردن می‌فهمید که برچسب‌های کلاهش یکی سفید و یکی سیاه است. زیرا در این حالت شخص A برای خود چنین استدلال می‌کند که اگر برچسب‌های کلاه من سیاه باشد، آن‌گاه C همان بار اول چهار برچسب سیاه می‌دید و می‌فهمید که برچسب کلاهش سفید است. پس این حالت ممکن نیست.

شخص A دوباره پیش خود فکر می‌کند: اگر برچسب‌های کلاه من سفید باشد، آن‌گاه شخص C همان بار اول می‌فهمید که برچسب‌های کلاهش یکی سفید و یکی سیاه است. در نتیجه این حالت ممکن نیست.

به همین ترتیب شخص A استدلال می‌کند که برچسب‌های کلاهش سفید نیز نیست، چون او در دور دوم متوجه می‌شد که برچسب‌های کلاهش یکی سفید و یکی سیاه است و این یک تناقض است. پس برچسب‌های کلاه فیلسوف B سیاه نیست. به همین ترتیب فیلسوف B استدلال می‌کند که برچسب‌های کلاهش سفید نیست.

***

همان‌طور که در مثال‌های بالا مشاهده شد، در روش برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مورد نظر درست نباشد (خلافش درست باشد). این مطلب را فرض خلف در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از معلومات مسئله و استدلال استنتاجی به یک تناقض می‌رسیم. این تناقض می‌تواند در رابطه با یکی از معلومات مسئله و یا امری پذیرفته‌شده از قبل باشد. چرا به این تناقض رسیدیم؟ همهٔ مراحل کار که درست است! علت آن است که فرض خلف نمی‌تواند درست باشد و علت این تناقض همان درست فرض کردن خلف حکم مسئله است. پس فرض خلف باطل و حکم مسئله مورد تأیید است.

این شیوه استدلال در همهٔ مسئله‌هایی که از برهان خلف استفاده می‌شود، به کار گرفته می‌شود.

در ادامه به کاربرد برهان خلف در چند مثال در حیطهٔ مسئله‌های ریاضی می‌پردازیم.

مثال ۷. اگر x عددی گویا و y عددی گنگ باشد، ثابت کنید x+y گنگ است.

پاسخ ۷. فرض خلف: اگر x+y گنگ نباشد، پس گویاست و می‌توان نوشت $z=x+y$ که در آن z عددی گویاست. در نتیجه: $z-x=y$. سمت چپ رابطهٔ اخیر عددی گویا و سمت راست آن عددی گنگ است و این یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و x+y گنگ است.

مثال ۸. اگر a عددی صحیح و a^2 زوج باشد، نشان دهید a عددی زوج است.

پاسخ ۸. اگر $a \in Z$ عددی زوج نباشد چون a، پس a عددی فرد است و داریم: $a = 2k+1$. در نتیجه:

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2+2k}_{k}) + 1 = 2k' + 1$$

یعنی a^2 عددی فرد است و این یک تناقض محسوب می‌شود.

مثال ۹. در صورتی که b و a دو عدد طبیعی متمایز باشند، ثابت کنید عدد $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ یک عدد صحیح نیست.

پاسخ ۹. فرض کنیم کسر مذکور برابر عدد صحیح n باشد (فرض خلف). داریم:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = n \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2-1}$$

با مقایسهٔ طرفین تساوی اخیر باید n^2-1 مربع کامل باشد. فرض کنیم:

$$n^2 - 1 = q^2 \Rightarrow n^2 - q^2 = 1$$

و این یک تناقض است، چون تفاضل دو مربع کامل مساوی یک نمی‌شود.

مثال ۱۰. الف) اگر a عددی گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{a}$ عددی گنگ است.

ب) ثابت کنید به ازای هر عدد گنگ a، عدد گنگ b دیگری وجود دارد که ab گویا باشد.

پاسخ ۱۰. الف) اگر $\frac{1}{a}$ عددی گنگ نباشد، پس گویاست و در نتیجه a گویاست که خلاف فرض مسئله است.

ب) فرض کنیم a عددی گنگ باشد. پس $\frac{1}{a}$ عددی گنگ است و می‌توان عدد b را برابر $\frac{1}{a}$ در نظر گرفت. در نتیجه:

$$ab = a \times \frac{1}{a} = 1 \in Q$$

منابع

۱. گاردنر، مارتین (۱۳۷۵). ریاضیات و سرگرمی‌ها (ج ۲). ترجمهٔ هرمز شهریاری. انتشارات آشتی.

۲. طاهری تنجانی، محمدتقی (۱۳۷۸). آموزش جبر و احتمال. انتشارات یکان.